Capitolo 1 – Esercizi

A. Rappresentazione in forma normale

A.1. [detto: Attacco in battaglia] Un esercito A si ritira in una postazione, che può essere attaccata sia via mare sia via terra dall'esercito B nemico. Si presume che tale attacco avverrà durante la prossima alba e che avverrà o via mare o via terra. La difesa dell'esercito A avrà successo solo se il grosso delle sue truppe si troverà nella parte che sarà attaccata: in tal caso l'esercito A otterrà 1 mentre l'esercito B otterrà 0. Allo stesso modo, l'attacco dell'esercito B avrà successo solo se avverrà nella parte in cui non si troverà il grosso delle truppe dell'esercito A: in tal caso l'esercito A otterrà 0 mentre l'esercito B otterrà 1.
Rappresentare il gioco in forma normale.

A.2. [detto: Corsa agli sportelli] Due investitori hanno un deposito in banca. Al momento attuale, la banca ha a disposizione solo 100 Euro liquidi. Ogni investitore può ritirare i soldi subito (E), oppure ritirarli a fine anno (F). Se entrambi ritirano i soldi subito, allora entrambi otterranno 50 Euro. Se entrambi ritirano i soldi a fine anno, allora entrambi otterranno 150 Euro. Se uno sceglie E e l'altro sceglie F, il primo otterrà 100 Euro, l'altro otterrà 0 Euro.
Rappresentare il gioco in forma normale.

A.3. [cfr. dispense Prof. Dall'Aglio (Foglio 1, Esercizio 3)] Una signora anziana chiede aiuto per attraversare la strada. E' necessaria una sola persona per aiutarla, più persone possono aiutarla, ma questo non comporta nessun miglioramento rispetto all'aiuto di una sola persona. Anna e Roberto sono le sole persone nelle vicinanze e ciascuno dei due deve decidere se aiutare o meno la signora anziana. Ognuno dei due trarrà un piacere pari a 3 se la signora anziana viene aiutata (dalla persona stessa o dall'altra) e 0 altrimenti, ma ognuno sosterrà un costo pari a 1 per il tempo necessario per aiutarla.
Rappresentare il gioco in forma normale.
Come cambia la situazione se Anna ha un forte senso altruistico per cui aiutare la signora anziana non le costa niente, mentre prova vergogna (con un costo pari a 1) se la signora anziana è stata aiutata da Roberto ma non da lei?

A.4. [cfr. libro Gibbons, Problema 1.3] I giocatori 1 e 2 stanno contrattando come ripartite tra loro 10 Euro. Entrambi i giocatori dichiarano simultaneamente le quote di cui desiderano appropriarsi, s_1

≥ 0 e $s_2 \geq 0$. Se $s_1 + s_2 \leq 10$, i giocatori ricevono le quote che hanno dichiarato. Se $s_1 + s_2 > 10$, i giocatori non ricevono nulla.
Rappresentare il gioco in forma normale.

A.5. [detto: Falco-Colomba] Due animali sono a caccia di una preda. La preda vale v per entrambi gli animali e il costo di combattere è, rispettivamente, di c_1 per il primo animale e di c_2 per il secondo animale. Ognuno dei due animali può comportarsi verso l'altro in maniera aggressiva (A), oppure in maniera mansueta (M). Se entrambi si comportano in maniera aggressiva, allora si dividono la preda in parti uguali (ottenendo $v/2$ ciascuno), ma sostengono i costi del combattimento. Se entrambi agiscono mansuetamente, allora si dividono la preda in parti uguali senza però dover sostenere i costi del combattimento. Se uno sceglie A e l'altro sceglie M, allora il primo otterrà l'intera preda v e l'altro non otterrà nulla.
Rappresentare il gioco in forma normale.

A.6 [detto: Pricing Game] Due rivenditori in un piccolo centro turistico devono scegliere all'insaputa dell'altro il prezzo di un bene che vendono entrambi. Ognuno dei due può scegliere un prezzo basso (L), oppure scegliere un prezzo alto (H). Se entrambi scelgono L, allora entrambi otterranno 1. Se entrambi scelgono H, allora entrambi otterranno 2. Se uno sceglie L e l'altro sceglie H, allora il primo otterrà 4 e il secondo otterrà 0.
Rappresentare il gioco in forma normale.

A.7. [Ex] Due ex fidanzati, Paolo e Sabrina, stanno per incontrarsi di nuovo per il funerale di un conoscente comune. Entrambi vorrebbero in qualche modo riprendere la relazione, ma temono un rifiuto da parte dell'altra/o. Perciò Paolo e Sabrina devono decidere se comportarsi con l'ex in maniera fredda (F) cioè distaccata, oppure in maniera calda (C) cioè ripropositiva. Se entrambi scelgono F, allora nulla cambierà, cioè entrambi otterranno 0. Se entrambi scelgono C, allora riprenderanno probabilmente la relazione, cioè entrambi otterranno 4. Se uno/a sceglie F e l'altra/o sceglie C, allora un po' per vanità il primo otterrà 2 mentre il secondo otterrà – 2.
Rappresentare il gioco in forma normale.

B. Strategie strettamente dominate

B.1. Siano dati due giocatori I e II, con insieme di strategie dati rispettivamente da $S_1 = \{A, B, C\}$ e $S_2 = \{a, b, c\}$. Data la tabella dei payoff

	a	*b*	*c*
A	2 , 1	0 , 0	0 , 1
B	4 , 3	2 , 2	1 , 0
C	0 , 1	4 , 0	1 , 3

determinare quali sono le strategie che sopravvivono all'eliminazione iterata di strategie strettamente dominate.

B.2. Siano dati due giocatori I e II, con insieme di strategie dati rispettivamente da $S_1 = \{A, B, C, D\}$ e $S_2 = \{a, b, c, d\}$. Data la tabella dei payoff

	a	*b*	*c*	*d*
A	2 , 5	2 , 7	1 , 2	1 , 0
B	2 , 1	3 , 2	2 , 5	2 , 1
C	0 , 1	1 , 4	1 , 3	1 , 2
D	1 , 0	0 , 1	3 , 2	3 , 3

determinare quali sono le strategie che sopravvivono all'eliminazione iterata di strategie strettamente dominate.

B.3. Costruire un gioco in forma normale con due giocatori, I e II, tale che: I ha a disposizione 2 strategie, II ha a disposizione 3 strategie, e i payoff dei giocatori siano tali che le strategie che sopravvivono all'eliminazione iterata di strategie strettamente dominate siano solo una per giocatore.

B.4. Costruire un gioco in forma normale con due giocatori, I e II, tale che: I ha a disposizione 2 strategie, II ha a disposizione 3 strategie, e i payoff dei giocatori siano tali che le strategie che sopravvivono all'eliminazione iterata di strategie strettamente dominate non siano solo una per ciascun giocatore.

C. Equilibri di Nash (strategie pure, strategie miste)

C.1. Calcolare gli equilibri di Nash in strategie pure dei giochi in A.1 – A.7 (tranne A.5).

C.2. Calcolare gli equilibri di Nash in strategie pure del gioco in A.5 nei seguenti tre casi: (a) $c_1 > v/2$, $c_2 > v/2$, (b) $c_1 > v/2$, $c_2 < v/2$, (c) $c_1 < v/2$, $c_2 < v/2$.

C.3. Sia $G = \{S_1, S_2, u_1, u_2\}$ un gioco con due giocatori I e II, con $S_1 = \{A, B\}$ e $S_2 = \{a, b\}$. Per ognuna delle seguenti tabelle dei payoff

	a	b
A	0 , 1	2 , 0
B	1 , 1	1 , 2

	a	b
A	4 , 3	3 , 1
B	1 , 2	0 , 3

	a	b
A	1 , 3	0 , 0
B	0 , 0	3 , 1

calcolare gli equilibri di Nash in strategie miste di G.

C.4. Sia $G = \{S_1, S_2, u_1, u_2\}$ un gioco con due giocatori I e II, con $S_1 = \{A, B\}$ e $S_2 = \{a, b\}$. Data la tabella dei payoff

	a	b
A	2 , 1	1 , 3
B	0 , 4	3 , 2

sia $M = (1/3, 2/3)$ una strategia mista di II. Qual è la risposta ottima di I alla strategia M? Esiste una strategia di I per cui la strategia M è una risposta ottima di II? Se sì, qual è?

C.5. Costruire quattro giochi G_1, G_2, G_3, G_4, in forma normale, con due giocatori, I e II, con insieme di azioni (= strategie) dati rispettivamente da $A_1 = \{A, B\}$ e $A_2 = \{a, b\}$, tali che:

1) in G_1 esistano equilibri di Nash in strategie pure e in strategie miste diverse da pure;

2) in G_2 esistano equilibri di Nash in strategie pure ma non in strategie miste diverse da pure;

3) in G_3 esistano equilibri di Nash in strategie miste diverse da pure ma non in strategie pure;

4) in G_4 non esistano equilibri di Nash in strategie pure né in strategie miste diverse da pure.

Suggerimento: per G_4 conviene vedere i risultati teorici.

C.6. Sia G il gioco con due giocatori, in cui $S_1 = S_2 = [0, \infty)$, con $x \in S_1$ e $y \in S_2$, e in cui i payoff sono:

$u_1(x, y) = 2xy - x^2$

$u_2(x, y) = 200y - 2xy - y^2$

Calcolare gli (eventuali) equilibri di Nash di G.

C.7. Sia G il gioco con tre giocatori, in cui $S_1 = S_2 = S_3 = [0, \infty)$, con $x \in S_1$, $y \in S_2$, $z \in S_3$, e in cui i payoff sono:

$u_1(x, y, z) = -x^2 + x(10 - y - z)$

$u_2(x, y, z) = -y^2 + y(4 - 2z)$

$u_3(x, y, z) = -z^2 + z(8 - 2x)$

Calcolare gli (eventuali) equilibri di Nash di G.

D. Duopolio di Cournot, duopolio di Bertrand (per *b* = 1)

D.1. [cfr. libro Gibbons, a pag. 24: Duopolio di Cournot]

Due imprese producono lo stesso bene.

Ogni impresa i, $i = 1, 2$, deve decidere all'insaputa dell'altra [ad esempio la decisione è presa simultaneamente] la quantità $q_i \in [0, \infty)$, $i = 1, 2$, di bene da produrre.

Il costo per produrre una certa quantità q di bene è cq, per entrambe le imprese.

Il prezzo del bene dipende da $Q = q_1 + q_2$ e dalla domanda di mercato a; esso è:

$P(Q) = a - Q = a - (q_1 + q_2)$

Il profitto delle imprese è dato dalla differenza ricavi-costi, cioè per ogni impresa i:

ricavi = $q_i P(Q)$

costi = cq_i

profitto = $\pi_i(q_1, q_2) = q_i P(Q) - cq_i = q_i [a - (q_1 + q_2) - c]$

Nota: si assume che $a > c > 0$.

Rappresentare il gioco in forma normale e calcolare gli (eventuali) equilibri di Nash del gioco.

Approfondimento 1

Sia (q^*_1, q^*_2) l'equilibrio di Nash del gioco.

Calcolare i payoff che le imprese ottengono scegliendo (q^*_1, q^*_2).

Approfondimento 2

Calcolare la quantità di monopolio q_m, cioè la quantità ottimale da produrre nel caso in cui esistesse una sola impresa [q_m può essere calcolata come risposta ottima dell'impresa 1 alla quantità $q_2 = 0$].

Approfondimento 3

Si assuma che le due imprese pensino al seguente tacito accordo: scegliere $(q_m/2, q_m/2)$.

Calcolare i payoff che le imprese ottengono in tal caso, confrontandoli con i payoff di sopra.

Approfondimento 4

Calcolare qual è la risposta ottima di un impresa alla strategia dell'altra impresa di scegliere $q_m/2$.

D.2. [cfr. libro Gibbons, Problema 1.4]

Un numero n di imprese producono lo stesso bene.

Ogni impresa i, $i = 1, \ldots, n$ deve decidere all'insaputa dell'altra [ad esempio la decisione è presa simultaneamente] la quantità $q_i \in [0, \infty)$, $i = 1, \ldots, n$, di bene da produrre.

Il costo per produrre una certa quantità q di bene è cq, per tutte le imprese.

Il prezzo del bene dipende da $Q = q_1 + \ldots + q_n$ e dalla domanda di mercato a; esso è

$P(Q) = a - Q = a - (q_1 + \ldots + q_n)$

Il profitto delle imprese è dato dalla differenza ricavi-costi, cioè per ogni impresa i:

ricavi = $q_i P(Q)$

costi = cq_i

profitto = $\pi_i(q_1, \ldots, q_n) = q_i P(Q) - cq_i = q_i [a - (q_1 + \ldots + q_n) - c]$

Nota: si assume che $a > c > 0$.

Rappresentare il gioco in forma normale e calcolare gli (eventuali) equilibri di Nash del gioco.

Cosa accade quando n tende a infinito?

D.3. [cfr. libro Gibbons, Problema 1.6]

Si assuma che nell'Esercizio D.1 i costi marginali di produzione possano essere diversi fra le due imprese, cioè siano rispettivamente c_1 e c_2 invece di c. Allora:

- Ripetere l'Esercizio D.1 (esclusi gli approfondimenti) assegnando ai parametri la seguente terna di valori: [$a = 1000$; $c_1 = 1$; $c_2 = 2$].
- Ripetere l'Esercizio D.1 (esclusi gli approfondimenti) assegnando ai parametri la seguente terna di valori: [$a = 1000$; $c_1 = 100$; $c_2 = 700$].

D.4. [cfr. libro Gibbons, a pag. 31: <u>Duopolio di Bertrand</u> (per $b = 1$)]

Due imprese producono lo stesso bene.

Ogni impresa i, $i = 1, 2$, deve decidere all'insaputa dell'altra [ad esempio la decisione è presa simultaneamente] il prezzo $p_i \in [0, \infty)$, $i = 1, 2$, del bene da produrre.

Il costo per produrre una certa quantità q di bene è cq, per entrambe le imprese.

Le quantità che i consumatori richiedono all'impresa 1 e all'impresa 2 sono rispettivamente

$q_1(p_1, p_2) = a - p_1 + p_2$

$q_2(p_1, p_2) = a - p_2 + p_1$

dove a è la domanda di mercato.

Il profitto delle imprese è dato dalla differenza ricavi-costi, cioè per ogni impresa i:

ricavi = $p_i\, q_i(p_1, p_2)$

costi = $c\, q_i(p_1, p_2)$

profitto = $\pi_i(p_1, p_2) = p_i\, q_i(p_1, p_2) - c\, q_i(p_1, p_2) = (p_i - c)\, q_i(p_1, p_2)$

Nota: si assume che $a > c > 0$.

Rappresentare il gioco in forma normale e calcolare gli (eventuali) equilibri di Nash del gioco.

D.5. [cfr. libro Gibbons, Problema 1.7]

Si consideri la situazione dell'Esercizio D.4, con la seguente modifica.

La quantità che i consumatori richiedono all'impresa i (per $i = 1, 2$) è

$q_i(p_1, p_2) = a - p_i$ se $p_i < p_j$

$q_i(p_1, p_2) = 0$ se $p_i > p_j$

$q_i(p_1, p_2) = (a - p_i) / 2$ se $p_i = p_j$

dove a è la domanda di mercato.

Verificare che esiste un (unico) equilibrio di Nash: le imprese scelgono lo stesso prezzo pari a c.

Capitolo 1 – Soluzioni

A. Rappresentazione in forma normale

S-A.1.

I giocatori sono due: {Esercito A, Esercito B}

Le strategie a disposizione di Esercito A sono due: {Mare (M), Terra (T)} (cioè, difesa via …)

Le strategie a disposizione di Esercito B sono due: {Mare (M), Terra (T)} (cioè, attacco via …)

I payoff sono riportati nella seguente tabella

Esercito A \ Esercito B	M	T
M	1 , 0	0 , 1
T	0 , 1	1 , 0

S-A.2.

I giocatori sono due: {I, II}

Le strategie a disposizione di I sono due: {Ritirare subito (E), Ritirare a fine anno (F)}

Le strategie a disposizione di II sono due: {Ritirare subito (E), Ritirare a fine anno (F)}

I payoff sono riportati nella seguente tabella

I \ II	E	F
E	50 , 50	100 , 0
F	0 , 100	150 , 150

S-A.3.

I giocatori sono due: {Anna, Roberto}

Le strategie a disposizione di Anna sono due: {Aiutare (A), Non aiutare (N)}

Le strategie a disposizione di Roberto sono due: {Aiutare (A), Non aiutare (N)}

I payoff sono riportati nella seguente tabella

			Roberto	
			A	N
	A		2 , 2	2 , 3
Anna	N		3 , 2	0 , 0

Variante

			Roberto	
			A	N
	A		3 , 2	3 , 3
Anna	N		2 , 2	0 , 0

S-A.4.

I giocatori sono due: {I, II}

Le strategie a disposizione di I sono date dall'insieme $S_1 = [0, 10]$; sia $s_1 \in S_1$.

Le strategie a disposizione di II sono date dall'insieme $S_2 = [0, 10]$; sia $s_2 \in S_2$.

I payoff sono i seguenti:

$u_1(s_1, s_2) = s_1$ se $s_1 + s_2 \leq 10$

$u_1(s_1, s_2) = 0$ se $s_1 + s_2 > 10$

$u_2(s_1, s_2) = s_2$ se $s_1 + s_2 \leq 10$

$u_2(s_1, s_2) = 0$ se $s_1 + s_2 > 10$

S-A.5.

I giocatori sono due: {I, II}

Le strategie a disposizione di I sono due: {Aggressiva (A), Mansueta (M)}

Le strategie a disposizione di II sono due: {Aggressiva (A), Mansueta (M)}

I payoff sono riportati nella seguente tabella

		II	
		A	M
	A	$v/2 - c_1$, $v/2 - c_2$	v , 0
I	M	0 , v	$v/2$, $v/2$

S-A.6.

I giocatori sono due: {I, II}

Le strategie a disposizione di I sono due: {Prezzo basso (L), Prezzo alto (H)}

Le strategie a disposizione di II sono due: {Prezzo basso (L), Prezzo alto (H)}

I payoff sono riportati nella seguente tabella

	L	H
L	1 , 1	4 , 0
H	0 , 4	2 , 2

S-A.7.

I giocatori sono due: {Paolo, Sabrina}

Le strategie a disposizione di Paolo sono due: {Fredda (F), Calda (C)}.

Le strategie a disposizione di Sabrina sono due: {Fredda (F), Calda (C)}.

I payoff sono riportati nella seguente tabella

		Sabrina	
		F	C
	F	0 , 0	2 , – 2
Paolo	C	– 2 , 2	4 , 4

B. Strategie strettamente dominate

S-B.1.

Date due strategie, H e K, scriviamo $H > K$ se H domina strettamente K.

	a	b	c
A	2 , 1	0 , 0	0 , 1
B	4 , 3	2 , 2	1 , 0
C	0 , 1	4 , 0	1 , 3

Consideriamo giocatore I: $B > A$ (quindi A è eliminata).

	a	b	c
B	4 , 3	2 , 2	1 , 0
C	0 , 1	4 , 0	1 , 3

Consideriamo giocatore I: Non ci sono strategie strettamente dominate.

Consideriamo giocatore II: $a > b$ (quindi b è eliminata).

	a	c
B	4 , 3	1 , 0
C	0 , 1	1 , 3

Consideriamo giocatore I: Non ci sono strategie strettamente dominate.

Consideriamo giocatore II: Non ci sono strategie strettamente dominate.

Quindi le strategie che sopravvivono all'eliminazione iterata di strategie strettamente dominate sono $\{B, C\}$ per giocatore I, e $\{a, c\}$ per giocatore II.

S-B.2.

Date due strategie, H e K, scriviamo $H > K$ se H domina strettamente K.

	a	b	c	d
A	2 , 5	2 , 7	1 , 2	1 , 0
B	2 , 1	3 , 2	2 , 5	2 , 1
C	0 , 1	1 , 4	1 , 3	1 , 2
D	1 , 0	0 , 1	3 , 2	3 , 3

Consideriamo giocatore I: $B > C$ (quindi C è eliminata).

	a	b	c	d
A	2 , 5	2 , 7	1 , 2	1 , 0
B	2 , 1	3 , 2	2 , 5	2 , 1
D	1 , 0	0 , 1	3 , 2	3 , 3

Consideriamo giocatore I: Non ci sono strategie strettamente dominate.

Consideriamo giocatore II: $b > a$ (quindi a è eliminata).

	b	c	d
A	2 , 7	1 , 2	1 , 0
B	3 , 2	2 , 5	2 , 1
D	0 , 1	3 , 2	3 , 3

Consideriamo giocatore I: $B > A$ (quindi A è eliminata).

	b	c	d
B	3 , 2	2 , 5	2 , 1
D	0 , 1	3 , 2	3 , 3

Consideriamo giocatore I: Non ci sono strategie strettamente dominate.

Consideriamo giocatore II: $c > b$ (quindi b è eliminata).

	c	d
B	2 , 5	2 , 1
D	3 , 2	3 , 2

Consideriamo giocatore I: $D > B$ (quindi B è eliminata)

	c	d
D	3 , 2	3 , 3

Consideriamo giocatore I: Non ci sono strategie strettamente dominate.

Consideriamo giocatore II: $d > c$ (quindi c è eliminata).

	d
D	3 , 3

Consideriamo giocatore I: Non ci sono strategie strettamente dominate.

Consideriamo giocatore II: Non ci sono strategie strettamente dominate.

Quindi le strategie che sopravvivono all'eliminazione iterata di strategie strettamente dominate sono $\{D\}$ per giocatore I, e $\{d\}$ per giocatore II.

S-B.3

Soluzione libera.

S-B.4

Soluzione libera.

C. Equilibri di Nash (strategie pure, strategie miste)

S-C.1.

A.1

		Esercito B	
		M	T
Esercito A	M	$\underline{1}$, 0	0 , $\underline{1}$
	T	0 , $\underline{1}$	$\underline{1}$, 0

Non ci sono equilibri di Nash in strategie pure.

A.2

		II	
		E	F
I	E	$\underline{50}$, $\underline{50}$	100 , 0
	F	0 , 100	$\underline{150}$, $\underline{150}$

Ci sono due equilibri di Nash in strategie pure: (E, E) e (F, F).

A.3

		Roberto	
		A	N
Anna	A	2 , 2	$\underline{2}$, $\underline{3}$
	N	$\underline{3}$, $\underline{2}$	0 , 0

Ci sono due equilibri di Nash in strategie pure: (A, N) e (N, A).

Variante

Roberto

		A	N
	A	$\underline{3}, 2$	$\underline{3}, \underline{3}$
Anna	N	$2, \underline{2}$	$0, 0$

C'è un unico equilibrio di Nash in strategie pure: (A, N).

A.4

Sia $R_1(s_2)$ la risposta ottima del giocatore I alla strategia $s_2 \in S_2$.

Essa si ottiene massimizzando $u_1(s_1, s_2)$ rispetto alla variabile s_1.

Tenuto conto del vincolo, si ha che la migliore risposta a s_2 è

$s_1 = 10 - s_2$ per ogni $s_2 \in S_2$, cioè

$R_1(s_2) = 10 - s_2$ per ogni $s_2 \in S_2$

Sia $R_2(s_1)$ la risposta ottima del giocatore I alla strategia $s_1 \in S_1$.

Essa si ottiene massimizzando $u_2(s_1, s_2)$ rispetto alla variabile s_2.

Tenuto conto del vincolo, si ha che la migliore risposta a s_1 è

$s_2 = 10 - s_1$ (per ogni $s_1 \in S_1$), cioè

$R_2(s_1) = 10 - s_1$ per ogni $s_1 \in S_1$

Gli equilibri di Nash sono dati per definizione dalla mutua corrispondenza di risposte ottime. Quindi per determinarli possiamo: o tracciare i grafici delle risposte ottime per individuare la loro intersezione, oppure risolvere il sistema formato dalle risposte ottime (come in questo caso).

$s_1 = 10 - s_2$

$s_2 = 10 - s_1$

Quindi esistono infiniti equilibri di Nash, dati dall'insieme $\{(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2 : s_1 + s_2 = 10\}$.

A.6

	L	H
L	$\underline{1}, \underline{1}$	$\underline{4}, 0$
H	$0, \underline{4}$	$2, 2$

C'è un unico equilibrio di Nash in strategie pure: (L, L).

A.7

		Sabrina: F	Sabrina: C
Paolo	F	$\underline{0}$, $\underline{0}$	2 , – 2
	C	– 2 , 2	$\underline{4}$, $\underline{4}$

Ci sono due equilibri di Nash in strategie pure: (F, F) e (C, C).

S-C.2.

(*a*) $c_1 > v/2$, $c_2 > v/2$

		II: A	II: M
I	A	$v/2 - c_1$, $v/2 - c_2$	$\underline{v}$, $\underline{0}$
	M	$\underline{0}$, $\underline{v}$	$v/2$, $v/2$

Ci sono due equilibri di Nash in strategie pure: (A, M) e (M, A).

(*b*) $c_1 > v/2$, $c_2 < v/2$

		II: A	II: M
I	A	$v/2 - c_1$, $\underline{v/2 - c_2}$	$\underline{v}$, 0
	M	$\underline{0}$, $\underline{v}$	$v/2$, $v/2$

C’è un unico equilibrio di Nash in strategie pure: (M, A).

(*c*) $c_1 < v/2$, $c_2 < v/2$

		II: A	II: M
I	A	$\underline{v/2 - c_1}$, $\underline{v/2 - c_2}$	$\underline{v}$, 0
	M	0 , $\underline{v}$	$v/2$, $v/2$

C’è un unico equilibrio di Nash in strategie pure: (A, A).

S-C.3. Prima tabella

II

		a	b
	A	0 , 1	2 , 0
I	B	1 , 1	1 , 2

Sia $(r, 1-r)$ una generica strategia mista del giocatore I, con $0 \leq r \leq 1$.

Sia $(q, 1-q)$ una generica strategia mista del giocatore II, con $0 \leq q \leq 1$.

- Calcoliamo il payoff del giocatore I, nel caso in cui I scelga $(r, 1-r)$ e II scelga $(q, 1-q)$.

II

		q	$1-q$
	r	0 , 1	2 , 0
I	$1-r$	1 , 1	1 , 2

$u_1((r, 1-r), (q, 1-q)) = r[0q + 2(1-q)] + (1-r)[1q + 1(1-q)] = 2r - 2rq + q + 1 - q - rq - r + rq = r - 2rq + 1 = r\,(1 - 2q) + 1$.

Sia $R_1((q, 1-q))$ la risposta ottima del giocatore I alla strategia $(q, 1-q)$. Essa si ottiene massimizzando $u_1((r, 1-r), (q, 1-q)) = r\,(1 - 2q)$ rispetto alla variabile r. Cioè:

$R_1((q, 1-q)) = \text{argmax}_{\,0 \leq r \leq 1}\, u_1((r, 1-r), (q, 1-q)) = \text{argmax}_{\,0 \leq r \leq 1}\, [r\,(1 - 2q)]$

Si ottiene che:

Se $(1 - 2q) > 0$, allora la risposta ottima è $r = 1$ [infatti $r(1 - 2q)$ ha valore massimo per $r = 1$]

Se $(1 - 2q) < 0$, allora la risposta ottima è $r = 0$ [infatti $r(1 - 2q)$ ha valore massimo per $r = 0$]

Se $(1 - 2q) = 0$, allora la risposta ottima è $r \in [0, 1]$ [infatti $r(1 - 2q)$ ha comunque valore nullo]

Da cui:

Se $q < 1/2$ allora $r = 1$

Se $q > 1/2$ allora $r = 0$

Se $q = 1/2$ allora $r \in [0, 1]$

Nota: è impreciso dire che la risposta ottima è $r = 1$ oppure $r = 0$ e così via; si dovrebbe dire più precisamente che la risposta ottima è la strategia mista (1, 0) oppure la strategia mista (0, 1) e così via; tale forma imprecisa è adottata per brevità, basandosi sul fatto che la strategia mista essendo data da $(r, 1-r)$ è "univocamente" determinata dal valore della variabile r; la stessa considerazione varrà nel seguito per la risposta ottima dell'altro giocatore, cioè per la variabile q.

- Calcoliamo il payoff del giocatore II, nel caso in cui I scelga $(r, 1-r)$ e II scelga $(q, 1-q)$.

		II	
		q	$1-q$
I	r	0 , 1	2 , 0
	$1-r$	1 , 1	1 , 2

$u_2((r, 1-r), (q, 1-q)) = q[1r + 1(1-r)] + (1-q)[0r + 2(1-r)] = rq + q - rq + 2 - 2r - 2q + 2rq$
$= -q + 2rq - 2r + 2 = q\,(2r - 1) - 2r + 2$

Sia $R_2((r, 1-r))$ la risposta ottima del giocatore II alla strategia $(p, 1-p)$. Essa si ottiene massimizzando $u_2((r, 1-r), (q, 1-q)) = q\,(2r - 1) - 2r + 2$ rispetto alla variabile q. Cioè:
$R_2((r, 1-r)) = \text{argmax}_{\,0 \le q \le 1}\, u_2((r, 1-r), (q, 1-q)) = \text{argmax}_{\,0 \le q \le 1}\, [q\,(2r - 1)]$ (gli altri termini sono delle costanti)

Si ottiene che:
Se $(2r - 1) > 0$, allora la risposta ottima è $q = 1$ [infatti $q(2r - 1)$ ha valore massimo per $q = 1$]
Se $(2r - 1) < 0$, allora la risposta ottima è $q = 0$ [infatti $q(2r - 1)$ ha valore massimo per $q = 0$]
Se $(2r - 1) = 0$, allora la risposta ottima è $q \in [0, 1]$ [infatti $q(2r - 1)$ ha comunque valore nullo]

Da cui:
Se $r > 1/2$ allora $q = 1$
Se $r < 1/2$ allora $q = 0$
Se $r = 1/2$ allora $q \in [0, 1]$

- Gli equilibri di Nash sono dati per definizione dalla mutua corrispondenza di risposte ottime. Quindi per determinarli possiamo: o tracciare i grafici delle risposte ottime per individuare la loro intersezione (come in questo caso), oppure risolvere il sistema formato dalle risposte ottime.

Risposta ottima del giocatore I

Se $q < 1/2$ allora $r = 1$

Se $q > 1/2$ allora $r = 0$

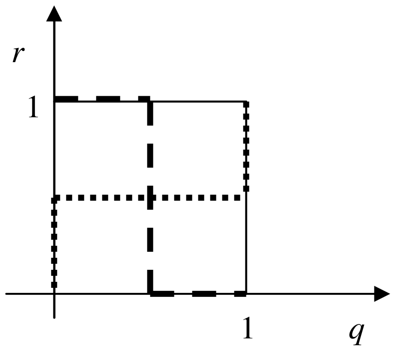
Se $q = 1/2$ allora $r \in [0, 1]$

Risposta ottima del giocatore II

Se $r > 1/2$ allora $q = 1$

Se $r < 1/2$ allora $q = 0$

Se $r = 1/2$ allora $q \in [0, 1]$



Quindi esiste un unico equilibrio di Nash in strategie miste, identificato dai valori dell'intersezione ($r = 1/2$, $q = 1/2$), cioè la coppia di strategie miste che costituiscono tale equilibrio di Nash è $((r, 1-r), (q, 1-q)) = ((1/2, 1/2), (1/2,1/2))$.

Nota: Un ulteriore metodo per ottenere un equilibrio di Nash, cioè per ottenere una mutua corrispondenza di risposte ottime, è il seguente. Si possono comparare le due risposte ottime, cercando direttamente coppie di valori delle variabili (r, q) che creano tale mutua corrispondenza; in dettaglio, si può considerare una sola variabile, sia p, per ciascuno dei valori che essa assume nelle tabelle, come segue.

Sia $r = 1$. Allora: (da I) si ha $q < 1/2$; (da II) si ha $q = 1$. Incompatibile.

Sia $r = 0$. Allora: (da I) si ha $q > 1/2$; (da II) si ha $q = 0$. Incompatibile.

Sia $0 < r < 1/2$. Allora: (da I) si ha $q = 1/2$; (da II) si ha $q = 1$. Incompatibile.

Sia $r = 1/2$. Allora: (da I) si ha $q = 1/2$; (da II) si ha $q \in [0, 1]$. Compatibile, per $q = 1/2$.

Sia $1/2 < r < 1$. Allora: (da I) si ha $q = 1/2$; (da II) si ha $q = 0$. Incompatibile.

Si ottengono quindi i valori $q = 1/2$ e $r = 1/2$.

S-C.3. Seconda tabella

	a	*b*
A	4 , 3	3 , 1
B	1 , 2	0 , 3

Sia $(r, 1-r)$ una generica strategia mista del giocatore I, con $0 \leq r \leq 1$.

Sia $(q, 1-q)$ una generica strategia mista del giocatore II, con $0 \leq q \leq 1$.

- Calcoliamo il payoff del giocatore I, nel caso in cui I scelga $(r, 1-r)$ e II scelga $(q, 1-q)$.

		II	
		q	$1-q$
	r	4 , 3	3 , 1
I	$1-r$	1 , 2	0 , 3

$u_1((r, 1-r), (q, 1-q)) = r[4q + 3(1-q)] + (1-r)[1q + 0(1-q)] = 4rq + 3r - 3rq + q - rq = 3r + q$.

Sia $R_1((q, 1-q))$ la risposta ottima del giocatore I alla strategia $(q, 1-q)$. Essa si ottiene massimizzando $u_1((r, 1-r), (q, 1-q)) = 3r + q$ rispetto alla variabile r. Cioè:

$R_1((q, 1-q)) = \text{argmax}_{\,0 \leq r \leq 1}\, u_1((r, 1-r), (q, 1-q)) = \text{argmax}_{\,0 \leq r \leq 1}\, [3r]$

Si ottiene che:

Se $q \in [0, 1]$, allora la risposta ottima è $r = 1$ [infatti $3r$ ha valore massimo per $r = 1$]

Da cui:

Se $q \in [0, 1]$ allora $r = 1$

- Calcoliamo il payoff del giocatore II, nel caso in cui I scelga $(r, 1-r)$ e II scelga $(q, 1-q)$.

		II	
		q	$1-q$
	r	4 , 3	3 , 1
I	$1-r$	1 , 2	0 , 3

$u_2((r, 1-r), (q, 1-q)) = q[3r + 2(1-r)] + (1-q)[1r + 3(1-r)] = 3rq + 2q - 2rq + r + 3 - 3r - rq - 3q + 3rq = 5q + 3rq - 2p + 3 = q\,(3r - 1) - 2r + 3$

Sia $R_2((r, 1-r))$ la risposta ottima del giocatore II alla strategia $(r, 1-r)$. Essa si ottiene massimizzando $u_2((r, 1-r), (q, 1-q)) = q\,(3r - 1) - 2r + 3$ rispetto alla variabile q. Cioè:

$R_2((r, 1-r)) = \text{argmax}_{\,0 \le q \le 1}\, u_2((r, 1-r), (q, 1-q)) = \text{argmax}_{\,0 \le q \le 1}\, [q\,(3r - 1)]$ (gli altri termini sono delle costanti)

Si ottiene che:

Se $(3r - 1) > 0$, allora la risposta ottima è $q = 1$ [infatti $q(3r - 1)$ ha valore massimo per $q = 1$]

Se $(3r - 1) < 0$, allora la risposta ottima è $q = 0$ [infatti $q(3r - 1)$ ha valore massimo per $q = 0$]

Se $(3r - 1) = 0$, allora la risposta ottima è $q \in [0, 1]$ [infatti $q(3r - 1)$ ha comunque valore nullo]

Da cui:

Se $r > 1/3$ allora $q = 1$

Se $r < 1/3$ allora $q = 0$

Se $r = 1/3$ allora $q \in [0, 1]$

- Gli equilibri di Nash sono dati per definizione dalla mutua corrispondenza di risposte ottime. Quindi per determinarli possiamo: o tracciare i grafici delle risposte ottime per individuare la loro intersezione (come in questo caso), oppure risolvere il sistema formato dalle risposte ottime.

<u>Risposta ottima del giocatore I</u>

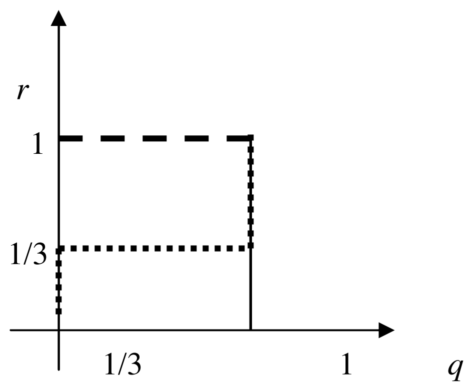
Se $q \in [0, 1]$ allora $r = 1$

<u>Risposta ottima del giocatore II</u>

Se $r > 1/3$ allora $q = 1$

Se $r < 1/3$ allora $q = 0$

Se $r = 1/3$ allora $q \in [0, 1]$



Quindi esiste un unico equilibrio di Nash in strategie miste, identificato dai valori dell'intersezione ($r = 1$, $q = 1$), cioè la coppia di strategie miste che costituiscono tale equilibrio di Nash è $((r, 1-r), (q, 1-q)) = ((1, 0), (1, 0))$.

S-C.3. Terza tabella

	a	b
A	1 , 3	0 , 0
B	0 , 0	3 , 1

Sia $(r, 1–r)$ una generica strategia mista del giocatore I, con $0 \leq r \leq 1$.

Sia $(q, 1–q)$ una generica strategia mista del giocatore II, con $0 \leq q \leq 1$.

- Calcoliamo il payoff del giocatore I, nel caso in cui I scelga $(r, 1–r)$ e II scelga $(q, 1–q)$.

		II	
		q	$1–q$
	r	1 , 3	0 , 0
I	$1–r$	0 , 0	3 , 1

$u_1((r, 1–r), (q, 1–q)) = r[1q + 0(1–q)] + (1–r)[0q + 3(1–q)] = rq + 3 – 3q – 3r + 3rq = 4rq – 3r – 3q + 3 = r\,(4q – 3) – 3q + 3$.

Sia $R_1((q, 1–q))$ la risposta ottima del giocatore I alla strategia $(q, 1–q)$. Essa si ottiene massimizzando $u_1((r, 1–r), (q, 1–q)) = r\,(4q – 3) – 3q + 3$ rispetto alla variabile r. Cioè:
$R_1((q, 1–q)) = \text{argmax}_{\,0 \leq r \leq 1}\, u_1((r, 1–r), (q, 1–q)) = \text{argmax}_{\,0 \leq r \leq 1}\, [r\,(4q – 3)]$ (gli altri termini sono delle costanti)

Se $(4q – 3) > 0$, allora la risposta ottima è $r = 1$ [infatti $r(4q – 3)$ ha valore massimo per $r = 1$]

Se $(4q – 3) < 0$, allora la risposta ottima è $r = 0$ [infatti $r(4q – 3)$ ha valore massimo per $r = 0$]

Se $(4q – 3) = 0$, allora la risposta ottima è $r \in [0, 1]$ [infatti $r(4q – 3)$ ha comunque valore nullo]

Da cui:

Se $q > 3/4$ allora $r = 1$

Se $q < 3/4$ allora $r = 0$

Se $q = 3/4$ allora $r \in [0, 1]$

- Calcoliamo il payoff del giocatore II, nel caso in cui I scelga $(r, 1–r)$ e II scelga $(q, 1–q)$.

		II	
		q	$1-q$
	r	1 , 3	0 , 0
I	$1-r$	0 , 0	3 , 1

$u_2((r, 1-r), (q, 1-q)) = q[3r + 0(1-r)] + (1-q)[0r + 1(1-r)] = 3rq + 1 - r - q + rq = 4rq - q - r + 1 = q(4r - 1) - r + 1$

Sia $R_2((r, 1-r))$ la risposta ottima del giocatore II alla strategia $(r, 1-r)$. Essa si ottiene massimizzando $u_2((r, 1-r), (q, 1-q)) = q\,(4r - 1) - r + 1$ rispetto alla variabile q. Cioè:
$R_2((r, 1-r)) = \text{argmax}_{\,0 \le q \le 1}\, u_2((r, 1-r), (q, 1-q)) = \text{argmax}_{\,0 \le q \le 1}\, [q\,(4r - 1)]$ (gli altri termini sono delle costanti)

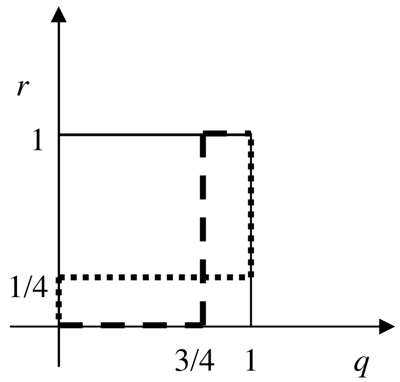
Si ottiene che:
Se $(4r - 1) > 0$, allora la risposta ottima è $q = 1$ [infatti $q(4r - 1)$ ha valore massimo per $q = 1$]
Se $(4r - 1) < 0$, allora la risposta ottima è $q = 0$ [infatti $q(4r - 1)$ ha valore massimo per $q = 0$]
Se $(4r - 1) = 0$, allora la risposta ottima è $q \in [0, 1]$ [infatti $q(4r - 1)$ ha comunque valore nullo]

Da cui:
Se $r > 1/4$ allora $q = 1$
Se $r < 1/4$ allora $q = 0$
Se $r = 1/4$ allora $q \in [0, 1]$

- Gli equilibri di Nash sono dati per definizione dalla mutua corrispondenza di risposte ottime. Quindi per determinarli possiamo: o tracciare i grafici delle risposte ottime per individuare la loro intersezione (come in questo caso), oppure risolvere il sistema formato dalle risposte ottime.

<u>Risposta ottima del giocatore I</u>
Se $q > 3/4$ allora $r = 1$
Se $q < 3/4$ allora $r = 0$
Se $q = 3/4$ allora $r \in [0, 1]$

<u>Risposta ottima del giocatore II</u>
Se $r > 1/4$ allora $q = 1$
Se $r < 1/4$ allora $q = 0$
Se $r = 1/4$ allora $q \in [0, 1]$



Quindi esistono tre equilibri di Nash in strategie miste, identificati dai valori delle tre intersezioni, rispettivamente (r = 0, q = 0), (r = 1/4, q = 3/4), (r = 1, q = 1), cioè le coppie di strategie miste che costituiscono tali equilibri di Nash sono rispettivamente:

$((r, 1-r), (q, 1-q)) = ((0, 1), (0, 1))$,

$((r, 1-r), (q, 1-q)) = ((1/4, 3/4), (3/4, 1/4))$,

$((r, 1-r), (q, 1-q)) = ((1, 0), (1, 0))$.

S-C.4.

		II	
		a	*b*
	A	2 , 1	1 , 3
I	*B*	0 , 4	3 , 2

Per risolvere questo esercizio, conviene calcolare le risposte ottime (in strategie miste) dei due giocatori, come nel precedente esercizio, e poi da queste "leggere" la soluzione dell'esercizio.

Sia $(r, 1-r)$ una generica strategia mista del giocatore I, con $0 \leq r \leq 1$.

Sia $(q, 1-q)$ una generica strategia mista del giocatore II, con $0 \leq q \leq 1$.

- Calcoliamo il payoff del giocatore I, nel caso in cui I scelga $(r, 1-r)$ e II scelga $(q, 1-q)$.

		II	
		q	$1-q$
	r	2 , 1	1 , 3
I	$1-r$	0 , 4	3 , 2

$u_1((r, 1-r), (q, 1-q)) = r[2q + 1(1-q)] + (1-r)[0q + 3(1-q)] = 2rq + r - rq + 3 - 3q - 3r + 3rq =$
$- 2r + 4rq - 3q + 3 = r(4q - 2) - 3q + 3$

Sia $R_1((q, 1-q))$ la risposta ottima del giocatore I alla strategia $(q, 1-q)$. Essa si ottiene massimizzando $u_1((r, 1-r), (q, 1-q)) = r(4q - 2) - 3q + 3$ rispetto alla variabile r. Cioè:
$R_1((q, 1-q)) = \text{argmax}_{0 \leq r \leq 1} u_1((r, 1-r), (q, 1-q)) = \text{argmax}_{0 \leq r \leq 1} [r(4q - 2)]$ (gli altri termini sono delle costanti)

Si ottiene che:
Se $(4q - 2) > 0$, allora la risposta ottima è $r = 1$ [infatti $r(4q - 2)$ ha valore massimo per $r = 1$]
Se $(4q - 2) < 0$, allora la risposta ottima è $r = 0$ [infatti $r(4q - 2)$ ha valore massimo per $r = 0$]
Se $(4q - 2) = 0$, allora la risposta ottima è $r \in [0, 1]$ [infatti $r(4q - 2)$ ha comunque valore nullo]

Da cui:
Se $q > 1/2$ allora $r = 1$
Se $q < 1/2$ allora $r = 0$
Se $q = 1/2$ allora $r \in [0, 1]$

- Calcoliamo il payoff del giocatore II, nel caso in cui I scelga $(r, 1-r)$ e II scelga $(q, 1-q)$.

		II	
		q	$1-q$
I	r	2 , 1	1 , 3
	$1-r$	0 , 4	3 , 2

$u_2((r, 1-r), (q, 1-q)) = q[1r + 4(1-r)] + (1-q)[3r + 2(1-r)] = rq + 4q - 4rq + 3r + 2 - 2r - 3rq - 2q$
$+ 2rq = 2q - 4rq + r + 2 = q(2 - 4r) + r + 2$

Sia $R_2((r, 1-r))$ la risposta ottima del giocatore II alla strategia $(r, 1-r)$. Essa si ottiene massimizzando $u_2((r, 1-r), (q, 1-q)) = q(2 - 4r) + r + 2$ rispetto alla variabile q. Cioè:
$R_2((r, 1-r)) = \text{argmax}_{0 \leq q \leq 1} u_2((r, 1-r), (q, 1-q)) = \text{argmax}_{0 \leq q \leq 1} [q(2 - 4r)]$ (gli altri termini sono delle costanti)

Si ottiene che:

Se $(2 - 4r) > 0$, allora la risposta ottima è $q = 1$ [infatti $q(2 - 4r)$ ha valore massimo per $q = 1$]

Se $(2 - 4r) < 0$, allora la risposta ottima è $q = 0$ [infatti $q(2 - 4r)$ ha valore massimo per $q = 0$]

Se $(2 - 4r) = 0$, allora la risposta ottima è $q \in [0, 1]$ [infatti $q(2 - 4r)$ ha comunque valore nullo]

Da cui:

Se $r < 1/2$ allora $q = 1$

Se $r > 1/2$ allora $q = 0$

Se $r = 1/2$ allora $q \in [0, 1]$

- Gli equilibri di Nash sono dati per definizione dalla mutua corrispondenza di risposte ottime. Quindi per determinarli possiamo: o tracciare i grafici delle risposte ottime per individuare la loro intersezione (come in questo caso), oppure risolvere il sistema formato dalle risposte ottime.

<u>Risposta ottima del giocatore I</u>

Se $q > 1/2$ allora $r = 1$

Se $q < 1/2$ allora $r = 0$

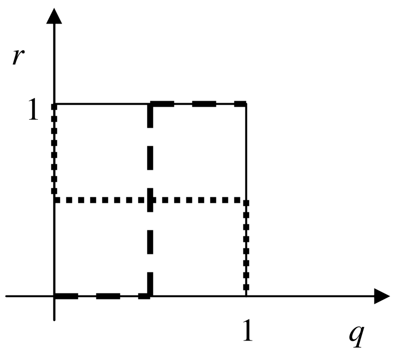
Se $q = 1/2$ allora $r \in [0, 1]$

<u>Risposta ottima del giocatore II</u>

Se $r < 1/2$ allora $q = 1$

Se $r > 1/2$ allora $q = 0$

Se $r = 1/2$ allora $q \in [0, 1]$



Quindi esiste un unico equilibrio di Nash in strategie miste, identificato dai valori dell'intersezione ($r = 1/2$, $q = 1/2$), cioè la coppia di strategie miste che costituiscono tale equilibrio di Nash è $((r, 1-r), (q, 1-q)) = ((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))$.

Torniamo ai quesiti dell'esercizio:

1) Sia $M = (1/3, 2/3)$ una strategia mista di II. Qual è la risposta ottima di I alla strategia M?

La strategia M corrisponde al valore $q = 1/3$. Leggendo la risposta ottima di I, si ottiene che la risposta ottima a $q = 1/3$ è $r = 0$, cioè la risposta ottima di I alla strategia $M = (1/3, 2/3)$ di II è la strategia mista (0, 1). In particolare, la strategia mista (0, 1) corrisponde per I alla strategia pura B.

2) Esiste una strategia di I per cui la strategia M è una risposta ottima di II? Se sì, qual è?
La strategia M corrisponde al valore $q = 1/3$. Leggendo la risposta ottima di II, si ottiene che $q = 1/3$ è risposta ottima a $r = 1/2$ (in quanto $q = 1/3$ rientra nel caso $q \in [0, 1]$), cioè la strategia M di II è una risposta ottima alla strategia mista (1/2, 1/2) di I.

S-C.5.
Soluzione libera.

S-C.6.
Sia $R_1(y)$ la funzione di risposta ottima del primo giocatore.
Essa si ottiene massimizzando $u_1(x, y)$ rispetto alla variabile x. Cioè:
$R_1(y) = \text{argmax}_{x \in S1}\ u_1(x, y)$
In base alle condizioni di ottimalità del primo ordine, calcoliamo la derivata di $u_1(x, y)$ rispetto a x e poniamola uguale a 0.
$\delta u_1(x, y) / \delta x = 2y - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y$ cioè $R_1(y) = y$

Sia $R_2(x)$ la funzione di risposta ottima del secondo giocatore.
Essa si ottiene massimizzando $u_2(x, y)$ rispetto alla variabile y. Cioè:
$R_2(x) = \text{argmax}_{y \in S2}\ u_2(x, y)$
In base alle condizioni di ottimalità del primo ordine, calcoliamo la derivata di $u_2(x, y)$ rispetto a y e poniamola uguale a 0.
$\delta u_2(x, y) / \delta y = 200 - 2x - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 100 - x$ cioè $R_1(x) = 100 - x$

Gli equilibri di Nash sono dati per definizione dalla mutua corrispondenza di risposte ottime. Quindi per determinarli possiamo: o tracciare i grafici delle risposte ottime per individuare la loro intersezione, oppure risolvere il sistema formato dalle risposte ottime (come in questo caso).

$x = y$
$y = 100 - x$

Si ottiene la soluzione $x = 50$ e $y = 50$.

Quindi esiste un unico equilibrio di Nash dato da $(x, y) = (50, 50)$.

S-C.7.

Sia $R_1(y, z)$ la funzione di risposta ottima del primo giocatore.

Essa si ottiene massimizzando $u_1(x, y, z)$ rispetto alla variabile x. Cioè:

$R_1(y, z) = \text{argmax}_{x \in S1}\ u_1(x, y, z)$

In base alle condizioni di ottimalità del primo ordine, calcoliamo la derivata di $u_1(x, y, z)$ rispetto a x e poniamola uguale a 0.

$\delta u_1(x, y, z) / \delta x = -2x + 10 - y - z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = (10 - y - z) / 2$

cioè $R_1(y, z) = (28 - y - z) / 2$.

Sia $R_2(x, z)$ la funzione di risposta ottima del secondo giocatore.

Essa si ottiene massimizzando $u_2(x, y, z)$ rispetto alla variabile y. Cioè:

$R_2(x, z) = \text{argmax}_{y \in S2}\ u_2(x, y, z)$

In base alle condizioni di ottimalità del primo ordine, calcoliamo la derivata di $u_2(x, y, z)$ rispetto a y e poniamola uguale a 0.

$\delta u_2(x, y, z) / \delta y = -2y + 4 - 2z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = (4 - 2z) / 2$

cioè $R_2(x, z) = (4 - 2z) / 2$.

Sia $R_3(x, y)$ la funzione di risposta ottima del secondo giocatore.

Essa si ottiene massimizzando $u_3(x, y, z)$ rispetto alla variabile z. Cioè:

$R_3(x, y) = \text{argmax}_{z \in S3}\ u_2(x, y, z)$

In base alle condizioni di ottimalità del primo ordine, calcoliamo la derivata di $u_3(x, y, z)$ rispetto a z e poniamola uguale a 0.

$\delta u_3(x, y, z) / \delta z = -2z + 8 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad z = (8 - 2x) / 2$

cioè $R_3(x, y) = (8 - 2x) / 2$.

Gli equilibri di Nash sono dati per definizione dalla mutua corrispondenza di risposte ottime. Quindi per determinarli possiamo: o tracciare i grafici delle risposte ottime per individuare la loro intersezione, oppure risolvere il sistema formato dalle risposte ottime (come in questo caso).

$x = (10 - y - z) / 2$

$y = (4 - 2z) / 2$

$z = (8 - 2x) / 2 \quad\quad \Rightarrow \quad z = 4 - x$

Si può risolvere per sostituzione, ad esempio come segue:

- sostituire il valore di z (della terza equazione) nella prima e nella seconda equazione, ottenendo:

$x = (10 - y - (4 - x)) / 2 \quad \Rightarrow \quad x = 6 - y$

$y = (4 - 2(4 - x)) / 2$

$z = 4 - x$

- sostituire il valore di x (della prima equazione) nella seconda equazione, ottenendo:

$x = 6 - y$

$y = (4 - 2(4 - (6 - y))) / 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2$

$z = 4 - x$

- sostituire il valore di y (della seconda equazione) nella prima equazione e poi il valore di x (della prima equazione) nella terza equazione, ottenendo:

$x = 4$

$y = 2$

$z = 0$

Si ottiene la soluzione $x = 4$, $y = 2$, $z = 0$.

Quindi esiste un unico equilibrio di Nash dato da $(x, y, z) = (4, 2, 0)$.

D. Duopolio di Cournot, duopolio di Bertrand (per b = 1)

S-D.1.

Rappresentazione in forma normale.

I giocatori sono due: {impresa 1, impresa 2}

Le strategie a disposizione dei giocatori sono date rispettivamente dagli insiemi S_1, S_2, con $S_1 = [0, \infty)$, e $S_2 = [0, \infty)$; in particolare, $q_1 \in [0, \infty)$ e $q_2 \in [0, \infty)$.

I payoff di ogni giocatore sono dati rispettivamente dai profitti, cioè

$u_1(q_1, q_2) = \pi_1(q_1, q_2)$ e $u_2(q_1, q_2) = \pi_2(q_1, q_2)$.

Per calcolare gli eventuali equilibri di Nash, calcoliamo le funzioni di risposta ottima.

Sia $R_1(q_2)$ la funzione di risposta ottima dell'impresa 1.

Essa si ottiene massimizzando $u_1(q_1, q_2)$ rispetto alla variabile q_1.

$u_1(q_1, q_2) = \pi_1(q_1, q_2) = q_1[a - (q_1 + q_2) - c] = - q_1^2 + q_1(a - q_2 - c)$.

In base alle condizioni di ottimalità del primo ordine, calcoliamo la derivata di $u_1(q_1, q_2)$ rispetto a q_1 e poniamola uguale a 0.

$\delta u_1(q_1, q_2) / \delta q_1 = 0 \;\Rightarrow\; -2q_1 + (a - q_2 - c) = 0 \;\Rightarrow\; q_1 = (a - q_2 - c) / 2$

cioè: $R_1(q_2) = (a - q_2 - c) / 2$.

Sia $R_2(q_1)$ la funzione di risposta ottima dell'impresa 2.

Svolgendo analoghi calcoli si ottiene per simmetria $q_2 = (a - q_1 - c) / 2$,

cioè: $R_2(q_1) = (a - q_1 - c) / 2$.

Gli equilibri di Nash sono dati per definizione dalla mutua corrispondenza di risposte ottime. Quindi per determinarli possiamo: o tracciare i grafici delle risposte ottime per individuare la loro intersezione, oppure risolvere il sistema formato dalle risposte ottime (come in questo caso).

$q_1 = (a - q_2 - c) / 2$

$q_2 = (a - q_1 - c) / 2$

Si ottiene la soluzione $q_1 = (a - c) / 3$ e $q_2 = (a - c) / 3$.

Quindi esiste un unico equilibrio di Nash dato da $(q_1, q_2) = (\,(a - c) / 3, (a - c) / 3\,)$.

Approfondimento 1

Sia (q^*_1, q^*_2) l'equilibrio di Nash del gioco.

Calcolare i payoff che le imprese ottengono scegliendo $(q^*_1, q^*_2) = (\,(a - c) / 3, (a - c) / 3\,)$.

$u_1(q^*_1, q^*_2) = -{q^*_1}^2 + q^*_1(a - q^*_2 - c) = -(a - c)^2 / 9 + (a - c)^2 / 3 - (a - c)^2 / 9 = (a - c)^2 / 9$

$u_2(q^*_1, q^*_2) = (a - c)^2 / 9$ (per simmetria)

Approfondimento 2

Calcolare la quantità di monopolio q_m, cioè la quantità ottimale da produrre nel caso in cui esistesse una sola impresa (q_m può essere calcolata come risposta ottima dell'impresa 1 alla quantità $q_2 = 0$).

$R_1(0) = (a - 0 - c) / 2 = (a - c) / 2 = q_m$

Approfondimento 3

Si assuma che le due imprese pensino al seguente tacito accordo: scegliere $(q_m/2, q_m/2)$.

Calcolare i payoff che le imprese ottengono in tal caso, confrontandoli con i payoff di sopra.
Da sopra si ha $q_m/2 = (a - c) / 4$.

$u_1(q_m/2, q_m/2) = -(q_m/2)^2 + q_m/2\,(a - q_m/2 - c) = -(a - c)^2 / 16 + (a - c)^2 / 4 - (a - c)^2 / 16 =$
$= (a - c)^2 / 8$
$u_2(q_m/2, q_m/2) = (a - c)^2 / 8$ (per simmetria)
Riguardo il confronto si ha: $(a - c)^2 / 8 > (a - c)^2 / 9$

Approfondimento 4

Calcolare la risposta ottima di un impresa alla strategia dell'altra impresa di scegliere $q_m/2$.

$R_1(q_m/2) = (a - q_m/2 - c) / 2 = (a - (a - c) / 4 - c) / 2 = 3(a - c) / 8$
$R_2(q_m/2) = 3(a - c) / 8$ (per simmetria)

Si noti che la risposta ottima a $q_m/2$ non è $q_m/2$, ma $3(a - c) / 8$. Ciò significa che il tacito accordo dell'Approfondimento 3 risulterebbe fragile: infatti, se un giocatore scegliesse $q_m/2$, allora la risposta ottima dell'altro giocatore sarebbe $3(a - c) / 8$ (e non $q_m/2$), cioè l'altro giocatore rispondendo $3(a - c) / 8$ otterrebbe un payoff migliore di quello che otterrebbe rispondendo $q_m/2$ (cfr. Approfondimento 3). In altri termini, queste considerazioni sono per ribadire la robustezza del concetto di equilibrio di Nash.
[Calcolare il payoff che si ottiene rispondendo $3(a - c) / 8$ a $q_m/2$. Risposta: $9/64\,(a - c)^2$]

S-D.2.

Rappresentazione in forma normale.
I giocatori sono n: {impresa 1, …, impresa n}
Le strategie a disposizione dei giocatori sono date rispettivamente dagli insiemi $S_1, \ldots, S_n$, con $S_i = [0, \infty)$ per $i = 1, \ldots, n$; in particolare, $q_i \in [0, \infty)$ per $i = 1, \ldots, n$.
I payoff di ogni giocatore sono dati rispettivamente dai profitti, cioè
$u_i(q_1, \ldots, q_n) = \pi_i(q_1, \ldots, q_n)$ per $i = 1, \ldots, n$.

Consideriamo prima il caso $n = 3$ da cui si può dedurre una generalizzazione.
Per calcolare gli eventuali equilibri di Nash, calcoliamo le funzioni di risposta ottima.

Sia $R_1(q_2, q_3)$ la funzione di risposta ottima dell'impresa 1.

Essa si ottiene massimizzando $u_1(q_1, q_2, q_3)$ rispetto alla variabile q_1.

$u_1(q_1, q_2, q_3) = \pi_1(q_1, q_2, q_3) = q_1[a - (q_1 + q_2 + q_3) - c] = - q_1^2 + q_1(a - q_2 - q_3 - c)$.

In base alle condizioni di ottimalità del primo ordine, calcoliamo la derivata di $u_1(q_1, q_2, q_3)$ rispetto a q_1 e poniamola uguale a 0.

$\delta u_1(q_1, q_2, q_3) / \delta q_1 = 0 \;\Rightarrow\; - 2q_1 + (a - q_2 - q_3 - c) = 0 \;\Rightarrow\; q_1 = (a - q_2 - q_3 - c) / 2$

cioè: $R_1(q_2, q_3) = (a - q_2 - q_3 - c) / 2$.

Sia $R_2(q_1, q_3)$ la funzione di risposta ottima dell'impresa 2.

Svolgendo analoghi calcoli si ottiene per simmetria $q_2 = (a - q_1 - q_3 - c) / 2$

cioè: $R_2(q_1, q_3) = (a - q_1 - q_3 - c) / 2$.

Sia $R_3(q_1, q_2)$ la funzione di risposta ottima dell'impresa 3.

Svolgendo analoghi calcoli si ottiene per simmetria $q_3 = (a - q_1 - q_2 - c) / 2$

cioè: $R_3(q_1, q_2) = (a - q_1 - q_2 - c) / 2$.

Gli equilibri di Nash sono dati per definizione dalla mutua corrispondenza di risposte ottime. Quindi per determinarli possiamo: o tracciare i grafici delle risposte ottime per individuare la loro intersezione, oppure risolvere il sistema formato dalle risposte ottime (come in questo caso).

$q_1 = (a - q_2 - q_3 - c) / 2$

$q_2 = (a - q_1 - q_3 - c) / 2$

$q_3 = (a - q_1 - q_2 - c) / 2$

Si può risolvere, per simmetria, ponendo $q_1 = q_2 = q_3$ (avendo anche verificato che per Cramer il sistema ammette un'unica soluzione); così si possono sostituire q_2 e q_3 con q_1:

$q_1 = (a - q_1 - q_1 - c) / 2$

Si ottiene la soluzione $q_1 = (a - c) / 4$ e quindi $q_2 = (a - c) / 4$ e $q_3 = (a - c) / 4$.

Si ottiene la soluzione $q_1 = (a - c) / 4$, $q_2 = (a - c) / 4$, $q_3 = (a - c) / 4$.

Quindi esiste un unico equilibrio di Nash dato da $(q_1, q_2, q_3) = ((a - c) / 4, (a - c) / 4, (a - c) / 4)$.

Dai calcoli sopra esposti, confrontando anche i risultati ottenuti per il caso $n = 1$ (cfr. Esercizio D.1, monopolio) e per il caso $n = 2$ (cfr. Esercizio D.1), si può formulare la seguente generalizzazione:

Se i giocatori sono n, allora esiste un unico equilibrio di Nash dato da

$(q_1, \ldots, q_n) = ((a - c) / (n + 1), \ldots, (a - c) / (n + 1))$.

Concludiamo con la seguente osservazione (considerando anche il caso in cui n tende a ∞).

Osservazione: Al crescere del numero dei giocatori:

- la quantità prodotta da ogni giocatore [cioè $(a - c) / (n + 1)$] decresce; tende a 0 se n tende a ∞.
- la quantità complessiva prodotta [cioè $Q = q_1 + \ldots + q_n = n(a - c) / (n + 1)$] cresce; tende a $(a - c)$ se n tende a ∞.
- il prezzo del bene [cioè $P(Q) = a - Q$] decresce (dato che Q cresce); tende a c (= prezzo di costo) se n tende a ∞ (dato che Q tende a $(a - c)$).
- il profitto di ogni giocatore [cioè $q_i(P(Q) - c)$] decresce (dato che la quantità prodotta da ogni giocatore decresce e il prezzo del bene decresce); tende a 0 se n tende a ∞ (dato che q_i tende a 0 e $(P(Q) - c)$ tende a 0).

S-D.3.

Simile all'Esercizio D.1, senza però poter usufruire della simmetria; nel secondo caso, il sistema dà una soluzione in cui q_2 è negativo, mentre $q_2 \in [0, \infty)$: tuttavia se ne deduce che l'equilibrio di Nash esiste ed è dato da $q_2 = 0$ (cioè l'impresa 2 non entra nel mercato) e q_1 = quantità di monopolio.

S-D.4.

Rappresentazione in forma normale.

I giocatori sono due: {impresa 1, impresa 2}

Le strategie a disposizione dei giocatori sono date rispettivamente dagli insiemi S_1, S_2, con $S_1 = [0, \infty)$, e $S_2 = [0, \infty)$; in particolare, $p_1 \in [0, \infty)$ e $p_2 \in [0, \infty)$.

I payoff di ogni giocatore sono dati rispettivamente dai profitti, cioè

$u_1(p_1, p_2) = \pi_1(p_1, p_2)$ e $u_2(p_1, p_2) = \pi_2(p_1, p_2)$.

Per calcolare gli eventuali equilibri di Nash, calcoliamo le funzioni di risposta ottima.

Sia $R_1(p_2)$ la funzione di risposta ottima dell'impresa 1.

Essa si ottiene massimizzando $u_1(p_1, p_2)$ rispetto alla variabile p_1.

$u_1(p_1, p_2) = \pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - c)\, q_i(p_1, p_2) = (p_1 - c)\,(a - p_1 + p_2) = -p_1^2 + p_1(a + p_2 + c) - c(a + p_2)$

In base alle condizioni di ottimalità del primo ordine, calcoliamo la derivata di $u_1(p_1, p_2)$ rispetto a q_1 e poniamola uguale a 0.

$\delta u_1(p_1, p_2) / \delta p_1 = 0 \;\Rightarrow\; -2p_1 + (a + p_2 + c) = 0 \;\Rightarrow\; p_1 = (a + p_2 + c) / 2$

cioè: $R_1(p_2) = (a + p_2 + c) / 2$

Sia $R_2(p_1)$ la funzione di risposta ottima dell'impresa 2.

Svolgendo analoghi calcoli si ottiene per simmetria $p_2 = (a + p_1 + c) / 2$,

cioè: $R_2(p_1) = (a + p_1 + c) / 2$.

Gli equilibri di Nash sono dati per definizione dalla mutua corrispondenza di risposte ottime. Quindi per determinarli possiamo: o tracciare i grafici delle risposte ottime per individuare la loro intersezione, oppure risolvere il sistema formato dalle risposte ottime (come in questo caso).

$p_1 = (a + p_2 + c) / 2$

$p_2 = (a + p_1 + c) / 2$

Si ottiene la soluzione $p_1 = a + c$ e $p_2 = a + c$.

Quindi esiste un unico equilibrio di Nash dato da $(p_1, p_2) = (a + c, a + c)$.

S-D.5.

Evidenziamo che il prezzo p_i scelto da un impresa è comunque non inferiore a c e non superiore ad a, altrimenti la quantità o il profitto sarebbero negativi. Così scriviamo $c \leq p_i \leq a$.

Se l'impresa 1 sceglie c, allora la risposta ottima dell'impresa 2 è scegliere un qualsiasi p_i, con $c \leq p_i \leq a$, poiché il payoff è 0 per ogni p_i, con $c \leq p_i \leq a$. Per simmetria, lo stesso vale invertendo l'impresa 1 con l'impresa 2. Si ottiene che la coppia di strategie (c, c) è un equilibrio di Nash.

Se l'impresa 1 gioca $p_1 > c$, allora la risposta ottima dell'impresa 2 è $p_2 = p_1 - \varepsilon$, cioè la risposta ottima è scegliere un "infinitesimo" meno di p_1; d'altro canto, la risposta ottima dell'impresa 1 a p_2 è scegliere un "infinitesimo" meno di meno di p_2, cioè un prezzo che è strettamente minore di p_1 (e quindi diverso da p_1). Per simmetria, lo stesso vale invertendo l'impresa 1 con l'impresa 2. Ne segue che non può esistere un equilibrio di Nash formato da una coppia di prezzi (p_1, p_2) in cui si abbia $p_1 > c$ oppure $p_2 > c$.

Ricapitolando, esiste un unico equilibrio di Nash, in cui le imprese fissano lo stesso prezzo pari a c.