Appendice del Capitolo 1 – Cenni sull'Equilibrio Correlato di Aumann

Questi appunti – come appendice del Capitolo 1 del libro Gibbons [2] – riportano il concetto di Equilibrio Correlato di Aumann grazie ai Riferimenti indicati infondo adattandolo per lo scopo.

Premessa

Un *gioco* è una situazione in cui individui (*giocatori*) possono scegliere ognuno un certo comportamento (*strategia*), con il fine di massimizzare il proprio guadagno (*payoff*), tenendo conto però che il proprio payoff dipende dalle strategie scelte da tutti i giocatori.

Lo scopo della Teoria dei Giochi è prevedere il comportamento dei giocatori e quindi l'esito di un gioco. Ciò avviene ipotizzando che: (i) i giocatori interagiscono consapevolmente, cioè i giocatori sanno che il proprio payoff dipende dalle strategie scelte da tutti i giocatori, e ciò è conoscenza comune … ; (ii) i giocatori sono razionali, cioè i giocatori scelgono le strategie migliori per perseguire il loro fine, e ciò è conoscenza comune …

La *rappresentazione in forma normale di un gioco* specifica:

1) l'insieme dei giocatori, sia $\{1, ..., n\}$;

2) per $i = 1, ..., n$, l'insieme delle (possibili) strategie a disposizione del giocatore i, sia S_i ;

3) per $i = 1, ..., n$, la funzione di payoff del giocatore i, sia $u_i : S_1 \times \ldots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$, la quale associa a ogni combinazione di strategie dei giocatori il payoff del giocatore i.

Questo gioco è indicato con $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$.

Un gioco è *statico* se si svolge in un'unica fase [in cui giocatori scelgono una strategia simultaneamente o più in generale senza conoscere la strategia scelta dall'altro giocatore]. Un gioco è *dinamico* se si svolge in più fasi.

Un gioco è con *informazione completa* se tutti i giocatori conoscono i payoff di tutti i giocatori per ogni combinazione di strategie. Un gioco è con *informazione incompleta* se tale informazione è solo parziale.

Di seguito tratteremo i giochi trattati nel Capitolo 1 del libro Gibbons cioè i giochi statici con informazione completa.

Equilibrio di Nash (EN)

L'approccio di Nash afferma che il comportamento dei giocatori è quello di convergere verso un esito del gioco chiamato Equilibrio di Nash e indicato di seguito con EN.

Un modo per motivare la definizione dell' EN è sostenere che, se il compito della Teoria dei Giochi è quello di prevedere l'esito di un gioco, allora tale esito deve essere "stabile", cioè i giocatori non hanno convenienza a deviare [autonomamente] da tale esito una volta verificatosi, e "credibile", cioè i giocatori sono disposti a convergere verso tale esito.

Definizione (strategie pure)

Nel gioco $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$ con n giocatori, una *strategia pura* del giocatore i (per $i = 1, \ldots, n$) è un elemento dell'insieme S_i, cioè è semplicemente una strategia a sua disposizione.

Definizione (EN in strategie pure)

Nel gioco $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$ con n giocatori, le strategie $(s_1^*, \ldots, s_n^*) \in S_1 \times \ldots \times S_n$ sono un *Equilibrio di Nash in strategie pure di G* se, per ogni giocatore i con $i = 1, \ldots, n$, si ha:

$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$ per ogni $s_i \in S_i$.

La *risposta ottima* del giocatore i alle strategie $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ specificate per gli altri $n - 1$ giocatori, è la strategia $\bar{s}_i$ che risolve il problema

$\max \{u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) : s_i \in S_i\}$

Così, in altri termini, le strategie $(s_1^*, \ldots, s_n^*) \in S_1 \times \ldots \times S_n$ sono un Equilibrio di Nash in strategie pure di G se ognuna di esse è una risposta ottima alle altre.

Parentesi : strategie strettamente dominate

Sia $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$ un gioco con n giocatori; per ogni giocatore i con $i = 1, \ldots, n$, diciamo che una strategia $b \in S_i$ è una *strategia strettamente dominata* da un'altra strategia $a \in S_i$ se

$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, a, s_{i+1}, \ldots, s_n) > u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, b, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ per ogni $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S_1 \times \ldots S_{i-1} \times S_{i+1} \times \ldots S_n$

Cioè al giocatore i conviene strettamente scegliere a invece di b per ogni possibile scelta degli altri giocatori: allora la strategia b può essere eliminata da S_i. In base a tale approccio, è possibile definire un processo di *eliminazione iterata di strategie strettamente dominate*. Le seguenti proposizioni implicano che il concetto di soluzione di un gioco basato sull'EN è più forte di quello basato sul processo di eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate.

Proposizione A: Sia $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$ un gioco con n giocatori e sia $(s_1^*, \ldots, s_n^*) \in S_1 \times \ldots \times S_n$ un Equilibrio di Nash in strategie pure di G. Allora le strategie $s_1^*, \ldots, s_n^*$ sopravvivono al processo di eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate.

Proposizione B: Sia $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$ un gioco con n giocatori. Se al processo di eliminazione iterata delle strategie strettamente dominate sopravvive esattamente una strategia per ogni giocatore, sia $s_i^* \in S_i$ per $i = 1, \ldots, n$, allora $(s_1^*, \ldots, s_n^*) \in S_1 \times \ldots \times S_n$ è un Equilibrio di Nash in strategie pure di G.

Quindi per un gioco G sono possibili tre casi.

Caso 1: G ha 0 EN in strategie pure – un esempio è il gioco *Matching Pennies*.

Descrizione: ognuno dei due giocatori, siano I e II, ha in tasca una moneta che ha due facce (Testa o Croce); ognuno dovrà mostrare tale moneta all'altro, agendo in contemporanea, scegliendo se mostrare Testa o Croce;
se essi non mostrano la stessa faccia, allora I vince, diciamo I ottiene un payoff 1 e II ottirene un payoff -1;
se essi mostrano la stessa faccia, allora II vince, diciamo I ottiene un payoff -1 e II ottirene un payoff 1;
questa situazione è sintetizzata nella seguente tabella.

		II	
		Testa	Croce
I	Testa	- 1 , 1	1 , - 1
	Croce	1 , - 1	- 1 , 1

Si può verificare che tale gioco non ha EN in strategie pure.

Caso 2: G ha 1 EN in strategie pure – un esempio è il gioco *Dilemma del prigioniero*.

Descrizione: la Polizia ferma due individui, siano I e II, sapendo che hanno commesso un grande furto punibile con 9 mesi ma avendo le prove per dimostrare che hanno commesso un piccolo furto punibile con 1 mese; allora la Polizia li separa, al fine di far loro confessare il grande furto cioè al fine di farli "parlare", dicendo così a ognuno di loro:
se I parla e II parla, allora I e II saranno puniti ciascuno con 6 mesi (graziando parzialmente il grande furto);
se I parla e II tace, allora I sarà punito con 0 mesi (graziando il piccolo furto) e II sarà punito con 9 mesi;
se I tace e II parla, allora I sarà punito con 9 mesi e II sarà punito con 0 mesi (graziando il piccolo furto);
se I tace e II tace, allora I e II saranno puniti ciascuno con 1 mese;
questa situazione è sintetizzata nella seguente tabella.

		II	
		Tacere	Parlare
I	Tacere	- 1 , - 1	- 9 , $\underline{0}$
	Parlare	$\underline{0}$, - 9	$\underline{-6}$, $\underline{-6}$

Si può verificare che tale gioco ha 1 EN in strategie pure: (Parlare, Parlare).

Caso 3: *G* ha molteplici EN in strategie pure – un esempio è il gioco *Battaglia dei sessi*.

Descrizione: una coppia, siano I l'uomo e II la donna, devono possibilmente accordarsi brevemente (in un solo stadio) per uscire la sera; le possibili mete sono un incontro di Lotta oppure un concerto all'Opera;
se si accordano su Lotta, allora I ottiene un beneficio 2 e II ottiene un beneficio 1;
se si accordano su Opera, allora I ottiene un beneficio 1 e II ottiene un beneficio 2;
se non si accordano, allora non escono e così ottengono entrambi un beneficio 0;
questa situazione è sintetizzata nella seguente tabella.

		II	
		Lotta	Opera
I	Lotta	$\underline{2}$, $\underline{1}$	0 , 0
	Opera	0 , 0	$\underline{1}$, $\underline{2}$

Si può verificare che tale gioco ha 2 EN in strategie pure: (Lotta, Lotta) e (Opera, Opera).

Allora si ha che:

:: il Caso 1 comporta una assenza di previsione dell'esito del gioco: tale inconveniente è stato studiato dallo stesso Nash mediante l'introduzione delle strategie miste e del Teorema di Nash;
:: il Caso 2 comporta una esatta previsione dell'esito del gioco;
:: il Caso 3 comporta sia una indecisione sulla previsione dell'esito del gioco sia la possibilità che i giocatori convergano verso un esito del gioco diverso da un EN in strategie pure e – in particolare – che in tal modo ottengano un payoff minore del payoff che otterrebbero convergendo verso un EN

in strategie pure: tali inconvenienti sono stati studiati da Aumann mediante l'introduzione dell'Equilibrio Correlato.

Caso 1: *G* ha 0 EN in strategie pure

Per completezza riportiamo in questa sezione alcuni concetti e risultati relativi al Caso 1.

Ricordiamo che una *distribuzione di probabilità* su un insieme $A = \{a_1, \dots a_n\}$ è una assegnazione $P = (p_1, \dots p_n)$ di valori di probabilità p_i su a_i , per $i = 1, \dots, n,$ tale che $0 \leq p_i \leq 1$ e $p_1 + \dots + p_n = 1$.
Consideriamo di seguito un gioco $G = \{S_1, S_2;\ u_1, u_2\}$ con due giocatori.

Definizione (strategie miste)
Nel gioco $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$ con 2 giocatori, una *strategia mista* del giocatore i (per $i = 1, 2$) è una distribuzione di probabilità su S_i. □

Si noti che la strategia pura è un caso particolare della strategia mista: infatti una strategia pura può essere espressa in termini di strategia mista mediante una distribuzione di probabilità in cui un valore è pari 1 [quello associato alla strategia pura] e tutti gli altri valori sono pari a 0.

Il concetto di strategia mista formalizza la possibile indecisione di un giocatore circa la strategia da scegliere, nel senso che per un giocatore adottare una strategia mista equivale a estrarre a sorte una strategia, dall'insieme delle strategie a disposizione del giocatore, in base a tale strategia mista [cioè in base a tale distribuzione di probabilità]. Tramite il "criterio del valore atteso", come descritto nel libro Gibbons, è possibile calcolare i payoff che i giocatori ottengono scegliendo rispettivamente delle strategie miste.

In dettaglio: sia $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$ in gioco con 2 giocatori, con $S_1 = \{a_1, \dots, a_n\}$ e con $S_2 = \{b_1, \dots, b_m\}$; sia $P = (p_1, \dots p_n)$ una distribuzione di probabilità su S_1, cioè, una strategia mista del giocatore 1; sia $Q = (q_1, \dots q_m)$ una distribuzione di probabilità su S_2, cioè, una strategia mista del giocatore 2; allora, per $i = 1, ..., n$, e per $j = 1, ..., m$, la probabilità che si verifichi l'esito (a_i, b_j) è pari a $p_i \cdot q_j$; così, il corrispondente "payoff atteso $u_1(a_i, b_j)$" sarà pari a $p_i \cdot q_j \cdot u_1(a_i, b_j)$, e il corrispondente "payoff atteso $u_2(a_i, b_j)$" sarà pari a $p_i \cdot q_j \cdot u_2(a_i, b_j)$.

Ciò rende possibile la seguente definizione.

Definizione (EN in strategie miste)
Nel gioco $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$ con 2 giocatori, le strategie miste (P^*_1, P^*_2), una del giocatore 1, una del giocatore 2, sono un *Equilibrio di Nash in strategie miste di G* se ognuna di esse è una risposta ottima all'altra. □

Osservazione

Nel gioco $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$ con 2 giocatori, ogni EN di G [sia in strategie pure sia in strategie miste] *induce* una distribuzione di probabilità su $S_1 \times S_2$ [che è l'insieme dei possibili esiti di G] che assegna a ogni possibile esito di G la probabilità che esso si verifichi se i giocatori si comportano secondo tale EN: tale probabilità si ottiene moltiplicando le probabilità con cui i giocatori rispettivamente sceglieranno le strategie corrispondenti a quell'esito.

Ad esempio il gioco *Battaglia dei sessi* ammette tre EN:
:: il primo EN è in strategie pure (Lotta, Lotta), che equivale a ((1, 0), (1, 0)) in termini di strategie miste: esso induce la seguente distribuzione di probabilità su $S_1 \times S_2$

I/II	Lotta **(1)**	Opera **(0)**
Lotta **(1)**	$1 \cdot 1 =$ **1**	$1 \cdot 0 =$ **0**
Opera **(0)**	$0 \cdot 1 =$ **0**	$0 \cdot 0 =$ **0**

:: il secondo EN è in strategie pure (Opera, Opera), che equivale a ((0, 1), (0, 1)) in termini di strategie miste: esso induce la seguente distribuzione di probabilità su $S_1 \times S_2$

I/II	Lotta **(0)**	Opera **(1)**
Lotta **(0)**	$0 \cdot 0 =$ **0**	$0 \cdot 1 =$ **0**
Opera **(1)**	$1 \cdot 0 =$ **0**	$1 \cdot 1 =$ **1**

:: il terzo EN è in strategie miste ((2/3, 1/3), (1/3, 2/3)): esso induce la seguente distribuzione di probabilità su $S_1 \times S_2$

I/II	Lotta **(1/3)**	Opera **(2/3)**
Lotta **(2/3)**	$2/3 \cdot 1/3 =$ **2/9**	$2/3 \cdot 2/3 =$ **4/9**
Opera **(1/3)**	$1/3 \cdot 1/3 =$ **1/9**	$1/3 \cdot 2/3 =$ **2/9**

Così, in base alla definizione di strategia mista, un EN in strategie miste di un gioco può essere inteso come una [previsione del comportamento dei giocatori e una] previsione dell'esito del gioco in *termini probabilistici.*

Teorema (Nash, 1950)

Nel gioco in forma normale $G = \{S_1,\ldots, S_n, u_1,\ldots, u_n\}$ con n giocatori, se n è finito e se S_i è finito per ogni i, allora G ha almeno un Equilibrio di Nash, eventualmente in strategie miste.

Il Teorema di Nash afferma allora che per ogni gioco finito [cioè con un numero finito di giocatori, ognuno con a disposizione un numero finito di strategie] esiste almeno una previsione dell'esito del gioco in termini di EN, eventualmente in termini di EN in strategie miste – cioè in termini probabilistici.

Di conseguenza si ha che per ogni gioco finito che soddisfa il Caso 1, pur se vi è assenza di previsioni dell'esito del gioco in termini di EN in strategie pure, esiste una previsione dell'esito del gioco in termini di EN in strategie miste – cioè in termini probabilistici.

Caso 3: *G* ha molteplici EN in strategie pure

Ricordiamo gli inconvenienti del Caso 3:

1. una indecisione sulla previsione dell'esito del gioco;

2. la possibilità che i giocatori convergano verso un esito del gioco diverso da un EN in strategie e – in particolare – che in tal modo ottengano un payoff minore del payoff che otterrebbero convergendo verso un EN in strategie pure.

Consideriamo ad esempio il gioco *Battaglia dei sessi*.

		II	
		Lotta	Opera
I	Lotta	$\underline{2}$, $\underline{1}$	0 , 0
	Opera	0 , 0	$\underline{1}$, $\underline{2}$

Come già evidenziato, il gioco *Battaglia dei sessi* ha tre EN:

:: il primo EN è in strategie pure (Lotta, Lotta) = ((1, 0), (1, 0)).
:: il secondo EN è in strategie pure (Opera, Opera) = ((0, 1), (0, 1)).
:: il terzo EN è in strategie miste = ((2/3, 1/3), (1/3, 2/3)).

L'inconveniente (1) è legato direttamente al fatto che il gioco ha molteplici EN in strategie miste. L'inconveniente (2) è legato al fatto che il terzo EN induce una distribuzione di probabilità su $S_1 \times S_2$ (riportata di seguito) per la quale la probabilità che i due giocatori convergano verso un esito di *G* diverso da un EN in strategie pure, cioè convergano su (Lotta, Opera) o su (Opera, Lotta), è 4/9 + 1/9 = 5/9, e in particolare i giocatori in tal modo otterrebbero un payoff (pari a 0) minore del payoff che otterrebbero convergendo verso un EN in strategie pure.

I/II	Lotta **(1/3)**	Opera **(2/3)**
Lotta **(2/3)**	2/3 · 1/3 = **2/9**	2/3 · 2/3 = **4/9**
Opera **(1/3)**	1/3 · 1/3 = **1/9**	1/3 · 2/3 = **2/9**

Equilibrio Correlato

Riportiamo la definizione di Equilibrio Correlato di Aumann [adattandola per lo scopo] e uno schema per la sua applicazione al fine di superare gli inconvenienti (1) e (2), ristretti a un gioco con 2 giocatori, ma naturalmente generalizzabili.

Definizione (Equilibrio Correlato)
Nel gioco $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$ con 2 giocatori, tale che *G* soddisfa il Caso 3, un *Equilibrio Correlato di G* è una distribuzione di probabilità $P = (p_1, p_2, \ldots)$ su $S_1 \times S_2$ [che è l'insieme dei possibili esiti di *G*] tale che $p_h = 0$ in corrispondenza di ogni esito *h* di *G* che non è un EN in strategie pure di *G*.

Sia $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$ un gioco, con 2 giocatori, tale che *G* soddisfa il Caso 3.

Schema EC

Step 1 : i due giocatori si *accordano*, in modo non vincolante, su una distribuzione di probabilità *P* su $S_1 \times S_2$ [che è l'insieme dei possibili esiti di *G*] che è un Equilibrio Correlato di *G*.

Step 2 : i due giocatori *nominano un Mediatore* il quale: (i) estrae a sorte uno dei possibili esiti di *G* in base alla distribuzione di probabilità *P,* (ii) indica a ciascun giocatore la strategia da scegliere in base all'esito di *G* estratto.

Nota bene: Dato che *P* è un Equilibrio Correlato di *G*, nello Step 2-(i) l'esito di *G* estratto dal Mediatore è un EN in strategie pure di *G*, e di conseguenza nello Step 2-(ii) a ciascun giocatore converrà seguire l'indicazione del Mediatore, assumendo che l'altro giocatore segua l'indicazione del Mediatore. Così in finale i due giocatori seguiranno le indicazioni del Mediatore, e l'esito di *G* sarà quello estratto dal Mediatore, cioè sarà un [determinato] EN in strategie pure di *G*.

Esempio 0: Sia $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$ il gioco *Battaglia dei sessi.*

		II	
		Lotta	Opera
I	Lotta	$\underline{2}$, $\underline{1}$	0 , 0
	Opera	0 , 0	$\underline{1}$, $\underline{2}$

Il gioco *G* soddisfa il Caso 3 dato che ha due EN in strategie pure: (Lotta, Lotta) e (Opera, Opera).

Applichiamo lo Schema EC. Vediamo in dettaglio:

Nello Step 1, i giocatori si accordano su una qualsiasi distribuzione di probabilità $P = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ su $S_1 \times S_2$ [che è l'insieme dei possibili esiti di *G*] che è un Equilibrio Correlato di *G*, cioè, come indicata di seguito in figura, tale che $p_2 = 0$ e $p_3 = 0$.

I/II	Lotta	Opera
Lotta	p_1	p_2
Opera	p_3	p_4

In particolare le seguenti distribuzioni di probabilità sono Equilibri Correlati di *G*:

$(p_1,\ldots, p_4) = (1, 0, 0, 0)$

$(p_1,\ldots, p_4) = (0, 0, 0, 1)$

$(p_1,\ldots, p_4) = (1/2, 0, 0, 1/2)$

$(p_1,\ldots, p_4) = (1/3, 0, 0, 2/3)$

…

Nello Step 2 i giocatori nominano un Mediatore (che ad esempio può essere una terza persona o un estrattore a sorte). Nello Step 2-(i) il Mediatore estrae uno dei possibili esiti di G in base alla distribuzione di probabilità P [così il Mediatore estrae un EN in strategie pure di G, cioè, o (Lotta, Lotta) o (Opera, Opera)]. Nello Step 2-(ii) il Mediatore indica a ciascun giocatore la strategia da scegliere in base all'esito di G estratto: ad esempio se l'esito di G estratto è (Opera, Opera), allora il Mediatore indica al giocatore I di scegliere Opera e al giocatore II di scegliere Opera.

Alcune possibili applicazioni dell'Equilibrio Correlato

Riportiamo alcune possibili situazioni, formalizzate mediante giochi che soddisfano il Caso 3, a cui si potrebbe applicare lo Schema EC. L'aspetto che esse hanno in comune [così come nel gioco *Battaglia dei sessi*] è l'auspicio di un *coordinamento* fra i giocatori. Per ciascuna situazione eviteremo di ripetere lo Step 1 dello Schema EC, dato che esso è simile a quello dell'Esempio 0, mentre evidenzieremo i possibili candidati a Mediatore dello Step 2 dello Schema EC.

Esempio 1: *semaforo* (cfr. [5])

Due automobilisti, siano I e II, si trovano ad un incrocio. Ognuno di essi può scegliere di transitare (T) oppure di non transitare (NT). Rappresentiamo tale situazione mediante un gioco $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$ con 2 giocatori riportato di seguito.

		II	
		T	NT
I	T	- 100 , - 100	$\underline{1}$, $\underline{0}$
	NT	$\underline{0}$, $\underline{1}$	0 , 0

Per tale gioco, i giocatori possono nominare come Mediatore ad esempio un semaforo, che [adempiendo ai punti (i)-(ii) dello Step 2] indicherà a ciascun giocatore se scegliere T o NT.

Esempio 2: *medico curante*

Alcuni pazienti devono recarsi dal medico curante, senza particolare urgenza [ad esempio per controlli periodici], e devono scegliere un giorno per farlo. In generale sarebbe auspicabile un coordinamento dei pazienti, così da evitare il più possibile di sovrapporre le proprie scelte, per minimizzare il tempo di attesa.

Di seguito rappresentiamo una istanza minimale di tale situazione mediante un gioco $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$ con 2 giocatori, con S_1 = {L, M} e S_2 = {L, M} dove L indica il Lunedì e M indica il Martedì, e con i payoff che indicano i tempi di attesa stimati [che saranno indicati con numeri negativi dato che per convenzione l'obiettivo di un giocatore è di massimizzare il proprio payoff] considerando aleatorio l'ordine di arrivo dal medico curante.

		II: L	II: M
I	L	-10 , -10	$\underline{0}$, $\underline{0}$
I	M	$\underline{0}$, $\underline{0}$	-10 , -10

Per tale gioco, i giocatori possono nominare come Mediatore ad esempio il medico curante stesso, che [adempiendo ai punti (i)-(ii) dello Step 2] indicherà a ciascun paziente se scegliere L o M.

In generale per una applicazione reale: il medico curante potrebbe stabilire un intervallo temporale di *k* giorni, poi suddividere i pazienti in *k* gruppi bilanciati, e infine indicare a ciascun gruppo in quale giorno andare.

<u>Esempio 3</u>: *partenza per le vacanze*

Alcune persone di una grande città devono partire un sabato per le vacanze estive, senza particolare urgenza, e devono scegliere la fascia oraria per farlo. In generale sarebbe auspicabile un coordinamento delle persone, così da evitare il più possibile di sovrapporre le proprie scelte, per minimizzare [il traffico e quindi] il tempo di percorrenza.

Di seguito rappresentiamo una istanza minimale di tale situazione mediante un gioco $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$ con 2 giocatori, con S_1 = {A, B} e S_2 = {A, B} dove A indica una certa fascia oraria e B indica un'altra certa fascia oraria, e con i payoff che indicano i tempi di percorrenza stimati [che saranno indicati con numeri negativi dato che per convenzione l'obiettivo di ogni giocatore è di massimizzare il proprio payoff].

		II	
		A	B
I	A	-200 , -200	$\underline{-160}$, $\underline{-170}$
	B	$\underline{-170}$, $\underline{-160}$	-210 , -210

Per tale gioco, i giocatori possono nominare ad esempio come Mediatore l'ANAS gestore delle autostrade, che [adempiendo ai punti (i)-(ii) dello Step 2] indicherà a ciascuna persona se scegliere A o B.

In generale per una applicazione reale: l'ANAS gestore delle autostrade potrebbe stabilire un intervallo di k fasce orarie, poi suddividere le persone in k gruppi bilanciati in base ad esempio alle targhe, e infine indicare a ciascun gruppo quale fascia oraria scegliere.

Esercizi

Riportiamo un possibile esercizio.

Esercizio

Sia G il seguente gioco [tratto da una scena del film *A beautiful mind* (rivisitata)].

Due amici, siano I e II, in vacanza conoscono due amiche, siano A e B. Essi sono interessati a corteggiare le due amiche, e ognuno deve scegliere se corteggiare A oppure se corteggiare B. In generale sarebbe auspicabile un coordinamento dei due amici, così da evitare il più possibile di sovrapporre le proprie scelte, per massimizzare la loro soddisfazione attesa.

Di seguito rappresentiamo la situazione mediante un gioco $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$, con 2 giocatori, siano I e II, con $S_1 = \{A, B\}$ e $S_2 = \{A, B\}$ dove: A indica corteggiare l'amica A, B indica corteggiare l'amica B, e i payoff indicano la loro soddisfazione attesa stimata.

		II	
		A	B
I	A	2 , 2	$\underline{7}$, $\underline{7}$
		$\underline{7}$, $\underline{7}$	2 , 2

Svolgere i seguenti punti:

a) Calcolare gli EN in strategie pure di G.

b) Definire cosa si intende per Equilibrio Correlato di G.

c) Mostrare che, nonostante G abbia molteplici EN in strategie pure, i giocatori possono adottare uno schema, come possibile applicazione dell'Equilibrio Correlato, al fine di convergere su un [determinato] EN in strategie pure di G. Spiegare poi perché tale schema funziona.

Soluzione

a) Gli EN in strategie pure di G sono due: (A, B) e (B, A).

b) Nel gioco $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$, con 2 giocatori, un *Equilibrio Correlato di G* è una distribuzione di probabilità $P = (p_1, p_2, \ldots)$ su $S_1 \times S_2$ [che è l'insieme dei possibili esiti di G] tale che $p_h = 0$ in corrispondenza di ogni esito h di G che non è un EN in strategie pure di G.

c) I giocatori possono adottare il seguente schema.

Schema EC

Step 1 : i due giocatori si *accordano*, in modo non vincolante, su una distribuzione di probabilità P su $S_1 \times S_2$ [che è l'insieme dei possibili esiti di G] che è un Equilibrio Correlato di G.

Step 2 : i due giocatori *nominano un Mediatore* il quale: (i) estrae a sorte uno dei possibili esiti di G in base alla distribuzione di probabilità P, (ii) indica a ciascun giocatore la strategia da scegliere in base all'esito di G estratto.

Applichiamo lo Schema EC. Vediamo in dettaglio:

Nello Step 1, i giocatori si accordano su una qualsiasi distribuzione di probabilità $P = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ su $S_1 \times S_2$ [che è l'insieme dei possibili esiti di G] che è un Equilibrio Correlato di G, cioè, come indicata di seguito in figura, tale che $p_1 = 0$ e $p_4 = 0$.

I/II	A	B
A	p_1	p_2
B	p_3	p_4

In particolare le seguenti distribuzioni di probabilità sono Equilibri Correlati di G:

$(p_1,\ldots, p_4) = (0, 1, 0, 0)$
$(p_1,\ldots, p_4) = (0, 0, 1, 0)$
$(p_1,\ldots, p_4) = (0, 1/2, 1/2, 0)$
$(p_1,\ldots, p_4) = (0, 1/3, 2/3, 0)$
…

Nello Step 2, i giocatori nominano un Mediatore (che ad esempio può essere una terza persona o un estrattore a sorte), che [adempiendo ai punti (i)-(ii) dello Step 2] indicherà a ciascun giocatore se scegliere A o B.

Lo schema funziona per il seguente motivo.
Dato che P è un Equilibrio Correlato di G, nello Step 2-(i) l'esito di G estratto dal Mediatore è un EN in strategie pure di G, e di conseguenza nello Step 2-(ii) a ciascun giocatore converrà seguire l'indicazione del Mediatore, assumendo che l'altro giocatore segua l'indicazione del Mediatore. Così in finale i due giocatori seguiranno le indicazioni del Mediatore, e l'esito di G sarà quello estratto dal Mediatore, cioè sarà un [determinato] EN in strategie pure di G.

Riferimenti

[1] M. Di Giovanni, *Gli Equilibri Correlati di Aumann*, Tesi di Laurea, CLEII, Università degli Studi "G. D'Annunzio" di Chieti-Pescara, a.a. 2013/2014
[2] R. Gibbons, *Teoria dei giochi*, Ed. il Mulino, Bologna, 1992
[3] M. Li Calzi, *Aumann e la teoria dei giochi*
http://virgo.unive.it/licalzi/LiCalzi-AumannCooperativo.pdf
[4] R. Lucchetti, G. Rosolini, *Matematica al bar. Conversazioni su giochi, logica e altro* (pag. 31), Ed. Franco Angeli, 2012
[5] N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. V. Vazirani, *Algorithmic Game Theory*, 2007
[6] M. Paolini, *Una possibile applicazione dell'Equilibrio Correlato di Aumann*, Tesi di Laurea, CLEII, Università degli Studi "G. D'Annunzio" di Chieti-Pescara, a.a. 2015/2016
[7] F. Patrone, *Dire quel poco che basta*, http://www.fioravante.patrone.name/LMP_56_patrone.pdf